

Synchrotronstraling

H.J. Teunissen

Bachelorscriptie onder begeleiding van dr. L.J. van den Horn,
aan het Instituut voor Theoretische Fysica te Amsterdam.

Samenvatting

Synchrotronstraling is de straling afkomstig van relativistische geladen deeltjes in een magnetisch veld. In deze scriptie wordt de theorie van dit fenomeen opgebouwd tot aan het spectrum van een machtswet verdeling van elektronen. Met de klassieke elektrodynamica wordt eerst voor een enkel deeltje de hoekafhankelijkheid van de uitgezonden straling bepaald. Hierna volgt de afleiding van het spectrum, waarvoor uiteindelijk een uitdrukking in Airy functies wordt verkregen. Over de mathematisch gecompliceerde stappen die nodig zijn met betrekking tot deze functies gaat de uitgebreide appendix. Daarna wordt het energieverlies van de deeltjes door de uitgezonden straling uitgewerkt, ook wel ‘synchrotron koeling’ genoemd. Bij een machtswet verdeling van elektronen blijkt dat dit kan leiden tot zichtbare knikken in het waargenomen spectrum. Als voorbeeld wordt hiermee naar het breedbandspectrum van de nagloed bij een gamma-uitbarsting gekeken.



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Inhoudsopgave

1	Inleiding en overzicht	2
1.1	Wat bedoelt men met synchrotronstraling?	2
1.2	De vroege waarnemingen	3
1.3	De ontwikkeling van de theorie	3
2	Bewegingsvergelijking en geometrie	5
2.1	De bewegingsvergelijking in een magnetisch veld	6
2.2	Het relativistische <i>beaming effect</i>	6
2.3	De geometrie bij synchrotronstraling	8
3	De hoekverdeling van synchrotronstraling	10
3.1	Elektrisch en magnetisch veld van een puntlading	10
3.2	De uitgezonden straling van een puntlading	11
3.2.1	Klassieke dipoolstraling	12
3.2.2	De hoekverdeling bij een orthogonale versnelling	13
3.3	Kwantitatieve argumenten voor het kegel-model	14
3.3.1	De richtingen waarin geen straling wordt uitgezonden	14
3.3.2	De verwachtingswaarde van de openingshoek van de kegel	16
4	Het spectrum bij een gekromde beweging	17
4.1	Een algemene uitdrukking voor het spectrum	17
4.2	Benaderingen bij een gekromde beweging	18
4.3	Het spectrum bij een cirkelbeweging	21
4.4	Het spectrum bij een spiraalbeweging	22
5	Synchrotronstraling van meerdere elektronen	23
5.1	Een machtswet verdeling van elektronen	24
5.2	Energieverlies door synchrotronstraling	25
6	De nagloed van gamma-uitbarstingen	27
7	Slotwoord	30
A	Appendix	31
A.A	De Airy functie	31
A.B	Integraal over $Ai(y)$	31
A.C	Integraal over $y^{2n} Ai^2(a + y^2)$	32
A.D	Integraal over $Ai'^2(a + y^2)$	34
A.E	Bepaling van $\frac{d}{d\omega} P_\sigma$ en $\frac{d}{d\omega} P_\pi$	34
A.F	Integraal over $\sin(ax)/x$	35
A.G	Integraal over $\sin(\phi)^{2n}$	36
B	Het spectrum in Besselfuncties	36
C	Een benadering van de Airy functies	37

1 Inleiding en overzicht

Deze bachelorscriptie gaat over een fenomeen dat zo'n 60 jaar geleden voor het eerst is waargenomen, maar al een eeuw geleden theoretisch beschreven is: synchrotronstraling. Ondanks deze lange historie is juist recentelijk de aandacht voor dit onderwerp toegenomen, omdat vanuit zowel de experimentele fysica als de hoge-energie astrofysica interessante toepassingen naar voren zijn gekomen. De scriptie kan grof gezegd in tweeën worden gedeeld: eerst theorie over de synchrotronstraling van één deeltje, vervolgens een stuk over de straling van meerdere deeltjes en een toepassing hiervan. Hoewel op het eind de nadruk ligt op synchrotronstraling uit de kosmos, beschrijft het eerste deel ook synchrotronstraling zoals die experimenteel wordt gebruikt. Sommige aspecten van synchrotronstraling blijven onbesproken, zoals het lijnenspectrum of *undulators* en *wigglers*.

Een overzicht van de inhoud: Paragraaf 1 behandelt kort wat met synchrotronstraling bedoeld wordt en geeft een historische achtergrond. Vervolgens worden in paragraaf 2 de bewegingsvergelijking en uitgezonden straling (kwalitatief) van een relativistisch deeltje in een magnetisch veld besproken, daarbij slechts gebruik makend van de speciale relativiteitstheorie. De conclusie is dat een synchrotronbron een soort vuurtoren is die een intense, smalle bundel met een groot frequentiebereik rondzweept.

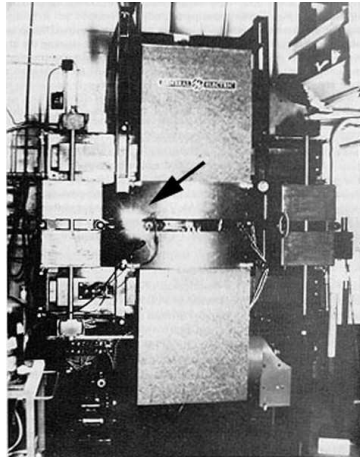
Om nu de daadwerkelijk uitgezonden straling van een geladen deeltje te bepalen wordt met de Maxwell-theorie in paragraaf 3 het hoekafhankelijke uitgestraalde vermogen bepaald. Het spectrum, van essentieel belang voor bijna elke toepassing, wordt in paragraaf 4 afgeleid voor zowel deeltjes in een cirkel- als spiraalbaan. Daarna gaat paragraaf 5 over het spectrum van door een machtswet verdeelde elektronen in de kosmos. Hier wordt ook 'synchrotron koeling' besproken, het energieverlies door de uitgezonden straling. De gewone tekst eindigt hierna met een toepassing uit de hoge-energie astrofysica in paragraaf 6, gevolgd door een slotwoord.

Dan is er nog een uitgebreide appendix A met diverse afleidingen met betrekking tot de Airy functie, die van groot belang is voor de beschrijving van synchrotronstraling.

1.1 Wat bedoelt men met synchrotronstraling?

Synchrotronstraling is straling uitgezonden door relativistische geladen deeltjes in een magnetisch veld. Door de Lorentz-kracht zullen ze een cirkel- of spiraalbeweging uitvoeren, en vanwege de hierbij horende versnelling gaan de deeltjes stralen. Deze straling wordt door het zogeheten *beaming effect* in de bewegingsrichting geconcentreerd. De smalle intense bundel straling die zo ontstaat heeft een groot frequentiebereik. Hierdoor heeft synchrotronstraling veel toepassingen in de analyse van materialen.

Synchrotronstraling werd het eerst waargenomen bij een synchrotron, dat is een cirkelvormige deeltjesversneller waarin men met instelbare elektrische en



Figuur 1: Foto gemaakt van de eerste waargenomen synchrotronstraling in 1947, uit [3].

magnetische velden geladen deeltjes tot bijna de lichtsnelheid kan versnellen.

1.2 De vroege waarnemingen

De eerste waarnemingen van synchrotronstraling zijn zo oud als de mensheid, al waren deze onbewust. In de kosmos bevinden zich namelijk vele bronnen van synchrotronstraling, een bekend voorbeeld is de krab-pulsar. Deze heeft een zogeheten *jet* van relativistische deeltjes welke door middel van synchrotronstraling het grootste deel van de uitgezonden straling veroorzaken.

De eerste experimentele waarneming is relatief recent, deze dateert namelijk van 24 april 1947. Toen werd in het General Electric Research Laboratory bij New York synchrotronstraling waargenomen met het blote oog [1], zie figuur 1.

In de astronomie werd er voor het eerst melding gemaakt van synchrotronstraling in een artikel [2] over de *jet* van het stelsel Messier 87, alhoewel anderen eerder vermoedens hadden geuit.

1.3 De ontwikkeling van de theorie

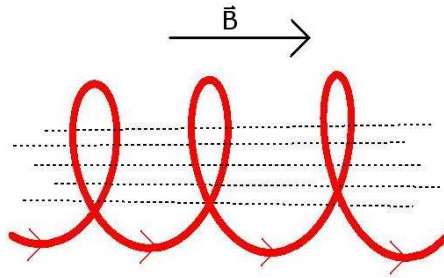
Bijzonder aan synchrotronstraling is dat de theorie voor het grootste deel klaar was aan het begin van de 20^e eeuw, terwijl de eerste waarneming pas in 1947 werd gedaan. Hieronder staat een overzicht van belangrijke gebeurtenissen in de ontwikkeling van de theorie.

1897 Er worden twee belangrijke ontdekkingen gedaan: J.J. Thomson leidde in Engeland uit experimenten met een kathode-buis het bestaan van elektronen af [4], de deeltjes die de voornaamste bron van synchrotronstraling zijn. Tegelijkertijd publiceerde J.J. Larmor in Frankrijk zijn bekend gewor-

den formule [5]. Deze geeft voor een versnellende lading de totale hoeveelheid uitgezonden straling, maar is alleen correct in de niet-relativistische limiet.

- 1898** A. Liénard introduceerde de geretardeerde potentialen in een artikel met de titel “Electric and magnetic field produced by an electric charge concentrated at a point and travelling on an arbitrary path” [6]. Hierin gaf hij onder andere een uitdrukking voor de hoeveelheid uitgezonden straling van een elektron in een cirkelbaan, de basis van synchrotronstraling. Het principe van de geretardeerde potentialen werd iets later onafhankelijk hiervan ook beschreven door E. Wiechert, waardoor ze uiteindelijk de naam “Liénard–Wiechert potentialen” kregen.
- 1908** In dit jaar publiceerde G.A. Schott een zeer uitgebreid essay met de titel “Electromagnetic Radiation” [7]. Hij won hiermee de “Adams prize”, een indertijd prestigieuze onderscheiding¹. Het essay was erop gericht de structuur van het atoom en stralingsovergangen beter te beschrijven met de elektrodynamica. In 327 pagina’s werd daartoe voor diverse configuraties en banen van elektronen de uitgezonden straling bepaald. Alhoewel dit niet het uiteindelijke doel was, beschreef Schott hiermee een groot deel van de fysica van synchrotronstraling.
- 1947** Van de in 1945 bedachte synchrotronversneller waren er al enkele gebouwd en vanuit Rusland was er interesse voor de straling die wel eens zou kunnen vrijkomen in deze deeltjesversnellers. Door de Russische theoretische resultaten realiseerde men zich dat deze straling waarneembaar moest zijn bij de 70MeV versneller van General Electric, wat vervolgens in 1947 waarheid werd (figuur 1).
- 1949** J.S. Schwinger publiceert een samenvattend artikel [8] over synchrotronstraling, waarin hij de al bekende resultaten op een elegante manier samenvat. Ook omdat hij de resultaten voor het eerst in Airy functies weet uit te drukken, welke getabuleerd waren, is dit artikel lange tijd het standaardwerk over synchrotronstraling geweest.
- na 1949** Met de jaren blijkt synchrotronstraling door de intensiteit en het grote spectrale bereik zeer geschikt voor de analyse van diverse materialen en moleculen. Maar ook vanuit de astrofysica komt er veel meer interesse. Omdat synchrotronstraling in grote mate geproduceerd wordt bij diverse kosmische processen, zoals gamma-uitbarstingen of supernova-explosies, is de analyse van de ontvangen straling van groot belang om deze gebeurtenissen beter te begrijpen. Deze toepassingen hebben behalve de bouw van speciale versnellers ook geleid tot een verscheidenheid

¹Hoewel de Adams-prize uitgereikt werd op basis van wiskundige prestaties is hij opvallend vaak uitgereikt aan personen die een belangrijke rol speelden in de beschrijving van synchrotronstraling: J.C. Maxwell(1857), J.J. Thomson (1882), J. Larmor(1899) en G.A. Schott(1909).



Figuur 2: De spiraliserende beweging van een elektron in een magnetisch veld.

aan literatuur over het onderwerp. Noemenswaardig is een in 1965 gepubliceerd overzichtsartikel van V.L. Ginzburg en S.I. Syrovatskii [9], nog steeds een van de standaardwerken. Meer recentelijk verschenen is [10], hierin zijn bovendien veel referenties te vinden naar andere werken op het gebied van synchrotronstraling.

Omdat de Maxwell-elektrodynamica relativistisch invariant is kon men de eigenschappen van synchrotronstraling bepalen zonder kennis van de nog niet bestaande relativiteitstheorie. Een mooi citaat van Schott (uit [7]) om dit te illustreren is: “I have refrained from making any use either of the Postulate of Relativity, or of the Aether Hypothesis which, by some, are regarded as inconsistent with each other”.

2 Bewegingsvergelijking en geometrie

Een logisch beginpunt van de beschrijving van synchrotronstraling is de bewegingsvergelijking van de bron, een geladen deeltje in een magnetisch veld. Om de afleiding niet onnodig ingewikkeld te maken wordt er uitgegaan van een constant magnetisch veld en geen elektrisch veld.

Omdat de deeltjes sterk relativistisch zijn moet men de relativistische mechanica gebruiken. Een interessant gevolg is dat in tegenstelling tot het klassieke geval de deeltjes met een lagere hoekfrequentie om het magneetveld roteren naarmate ze een hogere snelheid hebben, dus in een grotere baan. Vervolgens wordt er besproken wat er met uitgezonden straling gebeurt door deze relativistische beweging, en wat men daarom ongeveer verwacht waar te nemen.

2.1 De bewegingsvergelijking in een magnetisch veld

De bewegingsvergelijking die hoort bij een deeltje met lading q in een homogeen magnetisch veld B is

$$\frac{d}{dt}\gamma m \mathbf{v} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

waar links de tijdsafgeleide van de relativistische impuls staat en rechts de Lorentz-kracht. Omdat een magnetische kracht geen arbeid verricht geldt voor de energie U van het deeltje

$$\frac{d}{dt}U = \dot{\gamma} m c^2 = 0 \quad \text{dus} \quad \dot{v} = 0.$$

Hiermee versimpelt formule (2.1) tot $\gamma m \dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, of in termen loodrecht op en parallel aan het magnetisch veld

$$\dot{v}_{\parallel} = 0 \quad \text{en} \quad \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{\gamma m}(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (2.2)$$

Men ziet dat de versnelling altijd loodrecht op de snelheid staat, dus de deeltjes voeren een cirkel- of spiraalbeweging uit, zie figuur 2. Voor de hoekfrequentie ω_B die hier bij hoort geldt dan

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma m}.$$

Men noemt ω_B ook wel de *synchrotronfrequentie*.

2.2 Het relativistische *beaming effect*

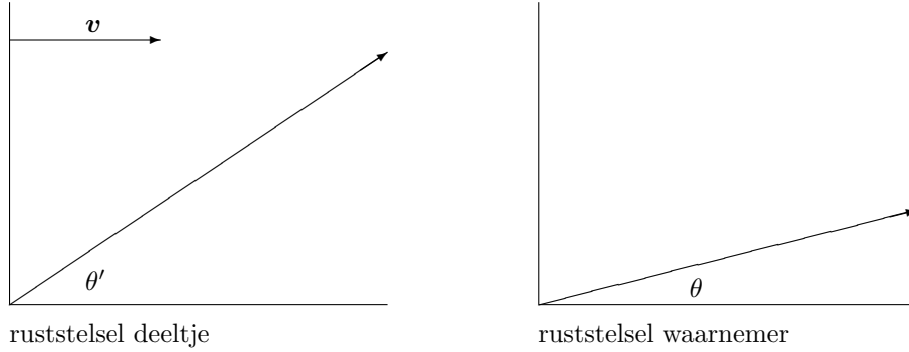
De orde van grootte schattingen die met behulp van het in deze paragraaf besproken *beaming effect* kunnen worden gemaakt zijn later ook van belang om benaderingen te kunnen maken. Kort gezegd komt het er op neer dat men van sterk relativistische deeltjes alleen een significante hoeveelheid straling verwacht waar te nemen binnen een hoek van enkele malen $1/\gamma$ met de bewegingsrichting.

Gegeven een bron met snelheid \mathbf{v} , als deze bron straling uitzendt die wordt waargenomen onder een bepaalde hoek dan zal die hoek in zijn eigen ruststelsel (aangegeven met een accent) doorgaans anders zijn. Als parallel in de richting van \mathbf{v} is, geven de Lorentztransformaties voor een snelheid u

$$u_{\perp} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma(1 + v u'_{\parallel}/c^2)} \quad (2.3)$$

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + v u'_{\parallel}/c^2}. \quad (2.4)$$

Stel nu dat een uitgezonden straal een hoek θ' maakt in het ruststelsel van de



Figuur 3: Eenzelfde lichtstraal in twee inertiaalstelsels, de hoek met de bewegingsrichting is aangegeven

bron, zie figuur 3, dan geldt

$$u'_{\perp} = \sin(\theta')c \quad \text{en} \quad u'_{\parallel} = \cos(\theta')c. \quad (2.5)$$

Met formule (2.3)–(2.4) leidt dit tot de volgende relaties

$$\sin(\theta) = \frac{u_{\perp}}{c} = \frac{\sin(\theta')}{\gamma(1 + \beta \cos(\theta'))} \quad (2.6)$$

$$\cos(\theta) = \frac{u_{\parallel}}{c} = \frac{\cos(\theta') + \beta}{1 + \beta \cos(\theta')} \quad (2.7)$$

$$\tan(\theta) = \frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}} = \frac{\sin(\theta')}{\gamma(\cos(\theta') + \beta)}. \quad (2.8)$$

Invullen van $\theta' = \frac{\pi}{2}$ in formule (2.6) geeft $\theta = \arcsin(\frac{1}{\gamma})$, dus voor een sterk relativistisch deeltje geldt

$$\theta \simeq \frac{1}{\gamma}. \quad (2.9)$$

Men ziet dat straling die loodrecht op de bewegingsrichting werd uitgezonden wordt waargenomen onder een kleine hoek met de bewegingsrichting. Deze bundeling onder een typische hoek van $1/\gamma$ is het zogeheten *beaming effect*.

Daarentegen is op te merken dat een hoek ϕ' , zoals gebruikelijk gedefinieerd in het vlak loodrecht op de $\theta' = 0$ richting, gelijk blijft voor de waarnemer. Immers de beide richtingen in het vlak transformeren op eenzelfde manier, en ϕ is bepaald door de verhouding van deze richtingen.

Voor $\gamma \gg 1$ is een schatting te maken onder welke hoek θ' straling uitgezonden moet zijn om waargenomen te worden onder een hoek $\theta \simeq \frac{n}{\gamma}$. Voor n klein ten opzichte van γ en $\beta \simeq 1$ kan men formule (2.8) benaderen met

$$n \simeq \frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta') + 1} \quad (2.10)$$

Tabel 1: De verwachte waargenomen verdeling van uniform uitgezonden straling door een sterk relativistisch deeltje

Waargenomen hoek	Percentage straling
$0 \leq \theta < 1/\gamma$	50,00%
$1/\gamma \leq \theta < 2/\gamma$	20.48%
$2/\gamma \leq \theta < 3/\gamma$	9.03%
$3/\gamma \leq \theta < 4/\gamma$	4.89%
$4/\gamma \leq \theta < 5/\gamma$	3.03%

en door te kwadrateren krijgt men als oplossing voor θ'

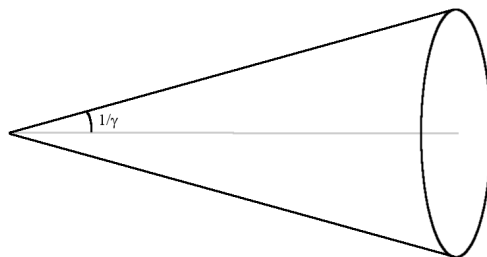
$$\theta' \simeq \arccos\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right). \quad (2.11)$$

Dit is in overeenkomst met het eerder gevonden resultaat voor $\theta' = \frac{\pi}{2}$, maar nu kan men met formule (2.11) bijvoorbeeld tabel 1 voor een uniform stralende bron opstellen.

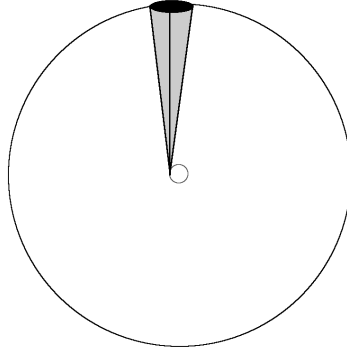
In de volgende paragraaf over de geometrie zal uitgegaan worden van een model waarin de synchrotronbron straling uitzendt in de bewegingsrichting binnen een kegel met halve tophoek $\frac{1}{\gamma}$, zoals weergegeven in figuur 4. Later zullen er enkele kwantitatieve argumenten aangevoerd worden voor deze beschrijving.

2.3 De geometrie bij synchrotronstraling

Uitgaande van de karakteristieke hoek $\theta \sim 1/\gamma$ kan men een schatting maken van de tijd Δt_{obs} die de ontvangen puls duurt voor de waarnemer. De as van de stralingskegel met tophoek $2/\gamma$ staat in de bewegingsrichting van het deeltje, en roteert dus om het magnetisch veld. Als de snelheid loodrecht op het magnetisch veld staat (cirkelbeweging) ziet dit er van grote afstand uit als in figuur 5. Aangezien in één periode T de kegel volledig roteert is deze zichtbaar gedurende



Figuur 4: De veronderstelde kegel van straling die een synchrotronbron uitzendt. De as ligt in de richting van de snelheid



Figuur 5: Synchrotronstraling bij een orthogonale versnelling. In het midden de synchrotronbron, waar een kegel straling met tophoek $\frac{2}{\gamma}$ roteert. De waarnemer bevindt zich op de grote cirkel

$$\Delta t = T \frac{\text{instantane projectie kegel}}{\text{gehele projectie kegel}} = T \frac{R \frac{2}{\gamma}}{2\pi R} = \frac{2}{\gamma \omega_B}$$

waar R de afstand tussen waarnemer en bron is en er nog niet gecorrigeerd is voor het Doppler-effect. Voor $\gamma \gg 1$ is de tophoek klein, dus komt het deeltje tijdens het uitzenden van de straling nagenoeg recht op de waarnemer af waarmee de Doppler-factor gelijk is aan $1 - \beta \simeq \frac{1}{2\gamma^2}$. Hiermee gecorrigeerd ziet de waarnemer de kegel gedurende

$$\Delta t_{obs} \simeq \frac{1}{\gamma^3 \omega_B}. \quad (2.12)$$

Wanneer de snelheid een arbitraire hoek α maakt met het magnetisch veld dan is de gehele projectie van de kegel $2\pi R \sin(\alpha)$, zie figuur 6, zodat formule (2.12) verandert in

$$\Delta t_{obs} \simeq \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \sin(\alpha)}.$$

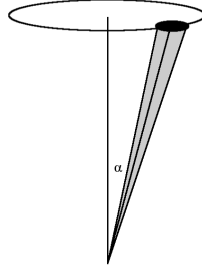
Met de relatie $\Delta\omega\Delta t \geq 1$ is zo een schatting te maken van de typische waargenomen frequentie ω_c , en de keuze van

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin(\alpha) \quad (2.13)$$

is dan een natuurlijke, zo wordt er net zo veel straling boven als onder deze zogeheten kritische frequentie uitgezonden.

Omdat voor de kromtestraal ρ bij een cirkel- of spiraalbeweging geldt

$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} = \frac{v}{\sin(\alpha)\omega_B},$$



Figuur 6: Synchrotronstraling met een hoek α tussen snelheid en magnetisch veld

kan de kritische frequentie ook geschreven worden als

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{v}{\rho}. \quad (2.14)$$

3 De hoekverdeling van synchrotronstraling

Als men de uitgezonden straling van een deeltje wil bepalen, heeft men de Maxwell-theorie van de elektrodynamica nodig. Omdat het hier een relativistische beweging betreft gebruikt men de geretardeerde potentialen. Een covariante afleiding is hier niet gevolgd, zie daarvoor bijvoorbeeld [11].

3.1 Elektrisch en magnetisch veld van een puntlading

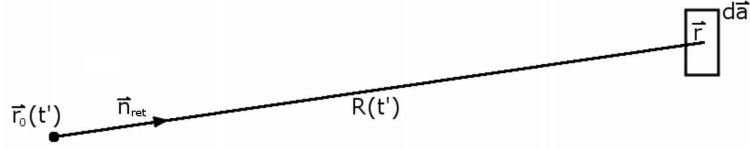
Vanwege de lengte van de afleidingen worden ze hier weggelaten, deze zijn te vinden in onder andere [11] of [12].

Gegeven een puntlading q met positie $\mathbf{r}_0(t)$ en snelheid $\boldsymbol{\beta}c$, dan zijn de bekende Liénard-Wiechert potentialen

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{ret} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\}_{ret}, \end{aligned}$$

waar $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ en $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Het subscript $_{ret}$ geeft aan dat een term op de geretardeerde tijd t' moet worden geëvalueerd, gedefinieerd als

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}. \quad (3.1)$$



Figuur 7: Een bron zendt straling uit op t' welke de waarnemer op \mathbf{r} een tijd later op t bereikt. Het oppervlak da staat loodrecht op \mathbf{n}_{ret} .

Hieruit kunnen vervolgens het elektrisch en magnetisch veld worden berekend

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{n}_{ret} \times \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c}.\end{aligned}$$

In het geval van synchrotronstraling is men geïnteresseerd in de termen die afvallen als $\frac{1}{R}$, de zogeheten stralingstermen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{n}_{ret} \times \frac{\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t)}{c}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Deze velden leiden tot de volgende uitdrukking voor de stralings-Poynting vector

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{ret}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

3.2 De uitgezonden straling van een puntlading

Gegeven een deeltje met positie $\mathbf{r}_0(t)$ en een waarnemer op \mathbf{r} , zie figuur 7. Als het deeltje op de geretardeerde tijd t' straling uitzendt, dan bereikt deze de waarnemer op het tijdstip t . De hoeveelheid stralings-energie $dQ(t)$ die de waarnemer van het deeltje ontvangt door een oppervlak $d\mathbf{a}$ in een tijd dt is

$$dQ(t) = (\mathbf{S}_{rad}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a}) dt.\tag{3.4}$$

Immers de Poynting vector $\mathbf{S}_{rad}(\mathbf{r}, t)$ is de gerichte flux van stralingsenergie per tijdseenheid per oppervlak die op tijdstip t door de ruimte stroomt bij \mathbf{r} . Om

nu een uitdrukking voor de uitgezonden straling te krijgen ligt het voor de hand de termen van formule (3.4) om te schrijven zodat ze afhankelijk zijn van de tijd van uitzenden, t' .

De energie die men ontvangt op tijdstip t is door het deeltje uitgezonden op t' , dus voor $dQ(t)$ kan men ook schrijven

$$dQ(t) = dW(t'), \quad (3.5)$$

waar $W(t')$ de uitgezonden energie van het deeltje is. Het oppervlakte element $d\mathbf{a}$ kan uitgedrukt worden als

$$d\mathbf{a} = R^2(t')d\Omega \mathbf{n}_{ret}, \quad (3.6)$$

waar Ω de ruimtehoek is. Als de Poynting vector wordt ingevuld met formules (3.2)–(3.3) krijgt men

$$\mathbf{S}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left\{ \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6} \right\}_{ret} \mathbf{n}_{ret}. \quad (3.7)$$

Vervolgens kan men overgaan van dt naar dt' , uit formule (3.1) volgt

$$\begin{aligned} dt &= \left(1 + \frac{\dot{R}(t')}{c}\right) dt' \\ &= \left(1 + \frac{\mathbf{n}_{ret} \cdot \dot{\mathbf{R}}(t')}{c}\right) dt' \\ &= \{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}\}_{ret} dt'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Als men nu formules (3.5)–(3.8) invult in formule (3.4) is het resultaat

$$\frac{dW(t')}{dt' d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left\{ \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right\}_{ret}. \quad (3.9)$$

Aangezien het rechterlid op t' geëvalueerd wordt en het linkerlid een functie van t' is, is het gebruikelijk de expliciete vermelding daarvan weg te laten, en als men tevens de notatie $P_e = \frac{dW}{dt'}$ invoert voor het uitgezonden vermogen wordt formule (3.9)

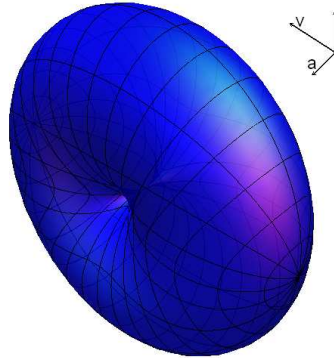
$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \quad (3.10)$$

Hiermee heeft men een algemene uitdrukking voor de hoekverdeling van de uitgezonden straling van een synchrotronbron.

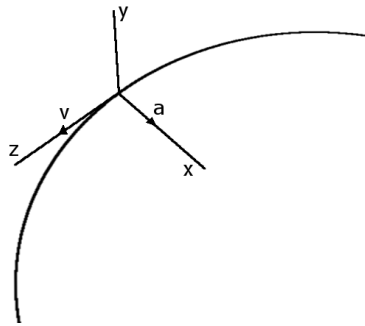
3.2.1 Klassieke dipoolstraling

In de niet-relativistische limiet ($\beta \rightarrow 0$) resulteert formule (3.10) in het bekende dipool stralingspatroon

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2(\theta),$$



Figuur 8: De straling uitgezonden door een versnellend deeltje in de niet-relativistische limiet ($\beta \simeq 0$), de as van de ‘donut’ ligt in de richting van de versnelling.



Figuur 9: Het gebruikte assenstelsel voor een versnelling loodrecht op de bewegingsrichting

waar θ de hoek tussen $\dot{\beta}$ en \mathbf{n} is. De ruimtelijke verdeling van de straling is weergegeven in figuur 8. Door te integreren over de ruimtehoek vindt men de totale uitgezonden energie per tijdseenheid

$$\frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \sin^2(\theta) \sin \theta d\phi d\theta = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}, \quad (3.11)$$

dit resultaat is de bekende Larmor-formule, genoemd in het historisch overzicht (paragraaf 1.3).

3.2.2 De hoekverdeling bij een orthogonale versnelling

Stel dat een deeltje een snelheid in de z -richting heeft en daar loodrecht op versnelt, bijvoorbeeld in de x -richting, zie figuur 9. Tweemaal gebruikmakend

van de identiteit $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = A^2 B^2 - |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2$ kan het rechterlid van (3.10) dan herschreven worden als

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1 + 2\beta n_z + \beta^2 - n_x^2 - \beta^2 n_y^2}{(1 - \beta n_z)^5}.$$

Met \mathbf{n} in bolcoördinaten gekozen krijgt men zo

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(1 - \beta \cos(\theta))^2 - (1 - \beta^2) \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{(1 - \beta \cos(\theta))^5}, \quad (3.12)$$

het stralingspatroon dat hierbij hoort is weergegeven in figuur 10 en 11. Door bijvoorbeeld de substitutie $y = 1 - \beta \cos(\theta)$ te maken is formule (3.12) te integreren over alle hoeken om het totale uitgezonden vermogen te krijgen

$$P_e = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}. \quad (3.13)$$

Men ziet dat er een factor γ^4 optreedt in vergelijking met niet-relativistische de Larmor-formule (3.11), maar het totale uitgezonden vermogen is niet evenredig met γ^4 . Omdat $a \propto \omega_B \beta$ (zie eventueel paragraaf 2.1) geldt

$$P_e \propto \gamma^2 - 1,$$

voor sterk relativistische deeltjes benadert men dit doorgaans met $P_e \propto \gamma^2$.

3.3 Kwantitatieve argumenten voor het kegel-model

Met de resultaten uit paragraaf 3.2.2 kan nu het kegel-model dat in 2.3 werd geïntroduceerd beter onderbouwd worden. Het *beaming effect* gaf een orde van grootte $1/\gamma$ voor de openingshoek van de bundel, deze kan nu wat kwantitatiever bepaald worden. Een zorgvuldige schatting van de openingshoek is van belang omdat aan de hand hiervan benaderingen worden gemaakt voor het spectrum, in paragraaf 4.

3.3.1 De richtingen waarin geen straling wordt uitgezonden

Als men gebruik maakt van de goniometrische identiteit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ is formule (3.12) ook te schrijven als

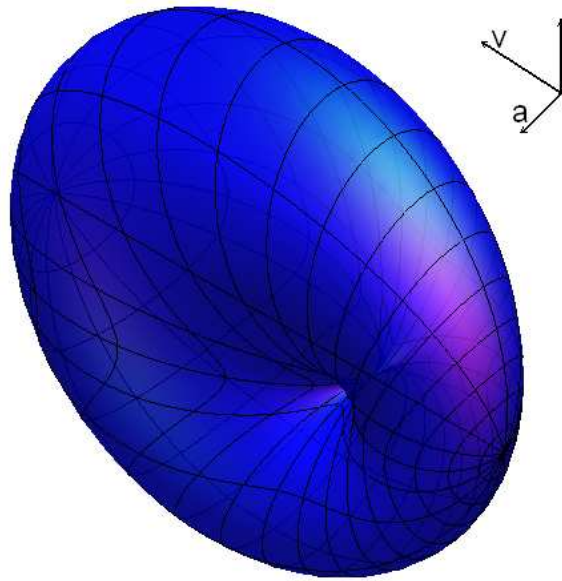
$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{(\beta - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\phi)(1 - \beta^2) \sin^2(\theta)}{(1 - \beta \cos(\theta))^5}.$$

Omdat beide termen in de teller niet negatief kunnen zijn kan men hieruit afleiden dat de enige richting waarin geen straling wordt uitgezonden is

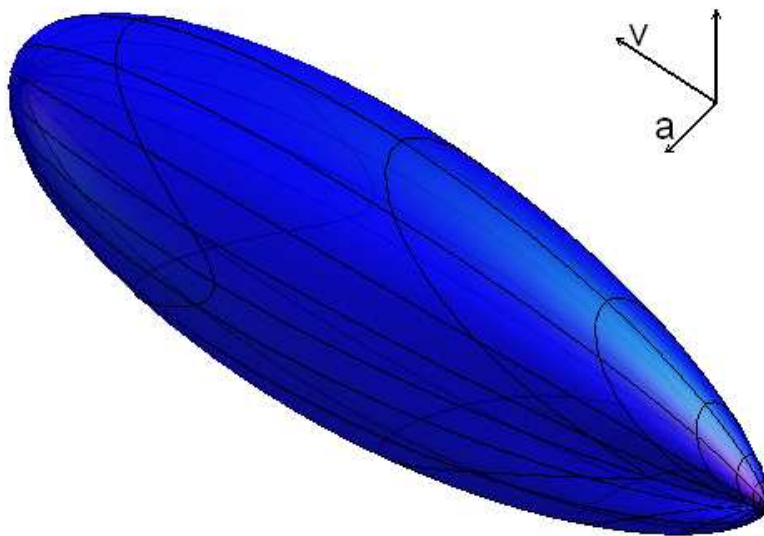
$$\theta = \arccos(\beta) \quad \text{en} \quad \phi = 0 \quad \text{of} \quad \pi.$$

Uit de integraalrepresentatie van de arccos volgt dat voor sterk relativistische deeltjes $\arccos(\beta) \simeq \frac{1}{\gamma}$, zodat de begrenzing van de uitgezonden 'kegel' van straling typisch bij $1/\gamma$ ligt.²

²Zie figuren 8, 10 en 11, de 'donut' wordt als het ware geplet binnen de hoek $1/\gamma$.



Figuur 10: De straling uitgezonden door een orthogonaal versnellend deeltje met $\beta = 0.2$.



Figuur 11: De straling uitgezonden door een orthogonaal versnellend deeltje met $\beta = 0.8$. Om op schaal te zijn met figuur 10 zou deze afbeelding zo'n 20 maal zo groot moeten zijn.

3.3.2 De verwachtingswaarde van de openingshoek van de kegel

In de relativistische limiet kan men met enige benaderingen de verwachtingswaarde van de openingshoek $\langle \theta^2 \rangle$ berekenen

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{P_e} \int \frac{dW}{dt' d\Omega} \theta^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (3.14)$$

Voor kleine θ en $\gamma \gg 1$ kan men β , $\cos(\theta)$ en $\sin(\theta)$ tot tweede orde benaderen, waarmee men ook tot tweede orde krijgt

$$1 - \beta \cos(\theta) \simeq \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}.$$

Met deze benaderingen wordt formule (3.12)

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{3\gamma^2 P_0}{\pi} \frac{1 - 2\gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4 \theta^4}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5},$$

invullen in formule (3.14), integreren over ϕ en nogmaals $\sin(\theta)$ benaderen geeft

$$\langle \theta^2 \rangle = 6\gamma^2 \int \frac{1 + \gamma^4 \theta^4}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \theta^3 d\theta, \quad (3.15)$$

waar geïntegreerd mag worden over een kleine hoek $0 \leq \theta \leq \frac{n}{\gamma}$ (n klein ten opzichte van γ). Vanwege het eerder besproken *beaming effect* is de fout door alleen over kleine θ te integreren gering, bijna alle straling wordt immers onder kleine hoek uitgezonden. Door nu over te gaan op $x = \gamma\theta$ wordt formule (3.15)

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{6}{\gamma^2} \int_0^n \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^5} x^3 dx$$

Als γ groot genoeg is, dus n niet al te klein, dan kan men de bovenste limiet zonder bezwaar op ∞ stellen. Door de hoge machten in de noemer is de fout klein, en partieel integreren levert vervolgens

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^2},$$

wat in overeenstemming is met het eerder besproken idee van een kegel straling van halve tophoek $1/\gamma$. De verwachtingswaarde $\langle \theta \rangle$ is ook te bepalen, maar daarbij treden een stuk lastiger integralen op, het resultaat is

$$\langle \theta \rangle = \frac{30\pi}{128\gamma} \simeq \frac{0.74}{\gamma}.$$

De methode die hier toegepast wordt komt bij de bepaling van het spectrum terug: men benadert voor een kleine hoek, vanwege het beaming effect zit praktisch alle straling binnen deze kleine hoek en vervolgens blijkt dat de integratiegrenzen met een kleine fout op oneindig gesteld kunnen worden.

4 Het spectrum bij een gekromde beweging

Voor de afleidingen die volgen is het overzichtelijk om alvast twee eigenschappen van Fouriertransformaties te bespreken. Beschouw een functie $f(t)$ met fouriergetransformeerde

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

ook wel verkort aangegeven met $\hat{f}(\omega)$. Parsevals relatie luidt dan als volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Als $f(t)$ reëelwaardig is dan geldt $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$, zodat men onderstaande gelijkheid krijgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.1)$$

4.1 Een algemene uitdrukking voor het spectrum

Gegeven een deeltje waarvan men gedurende een bepaalde tijd synchrotronstraling ontvangt. Om het spectrum te bepalen combineert men eerst formules (3.3), (3.4) en (3.6) tot de volgende vorm

$$\frac{dQ(t)}{d\Omega dt} = \frac{1}{\mu_0 c} (R(t') \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t))^2.$$

Aangezien het spectrum typisch iets is dat een waarnemer ontvangt, wordt $Q(t)$ gebruikt. Als men nu over wil gaan van het tijdsdomein naar het frequentiedomein integreert men eerst over de tijd

$$\frac{dQ_{tot}}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} (R(t') \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t))^2 dt, \quad (4.2)$$

waar Q_{tot} de totale hoeveelheid ontvangen straling is. De integratiegrenzen op $t = \pm\infty$ betekenen hier simpelweg dat over de tijd dat men straling ontvangt wordt geïntegreerd. Door gebruik te maken van formule (4.1) kan men nu schrijven

$$\frac{dQ_{tot}}{d\Omega} = \frac{2}{\mu_0 c} \int_0^{\infty} |\mathcal{F}[R(t') \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t)]|^2 d\omega,$$

hieruit volgt de uitdrukking voor het ontvangen vermogen per ruimtehoek per hoekfrequentie

$$\frac{dQ_{tot}}{d\omega d\Omega} = \frac{2}{\mu_0 c} |\mathcal{F}[R(t') \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t)]|^2. \quad (4.3)$$

Om het spectrum te bepalen rest de uitwerking van $\mathcal{F}[\mathbf{E}_{rad}(t)R(t')]$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathbf{E}_{rad}(t)R(t')] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{rad}(t)R(t')e^{-i\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} e^{-i\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt',\end{aligned}\quad (4.4)$$

waar $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}$ de factor voor de integraal is en er nu geïntegreerd wordt over de geretardeerde tijd. De veranderingen in de integrand volgen uit formule (3.8) en (3.1). Men kan nu als \mathbf{n} constant verondersteld wordt de volgende identiteit afleiden

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}.\quad (4.5)$$

De veronderstelling $\dot{\mathbf{n}} = 0$ is accuraat als $\frac{R}{R}$ gedurende het waarnemen van de straling bijna niet verandert, wat het geval is voor deeltjes die ver weg staan of sterk relativistisch zijn. Nu is formule (4.4) partieel te integreren

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathbf{E}_{rad}(t)R(t')] &= \alpha \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} (-i\omega(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})) e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt' \\ &= i\alpha\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt'.\end{aligned}\quad (4.6)$$

De stokterm term is weggelaten omdat de toestand op $t' = \pm\infty$ fysisch geen bijdrage kan leveren aan het spectrum op dit moment.

Als men nu formule (4.6) invult in formule (4.3) heeft men de uitdrukking voor het hoekafhankelijke spectrum

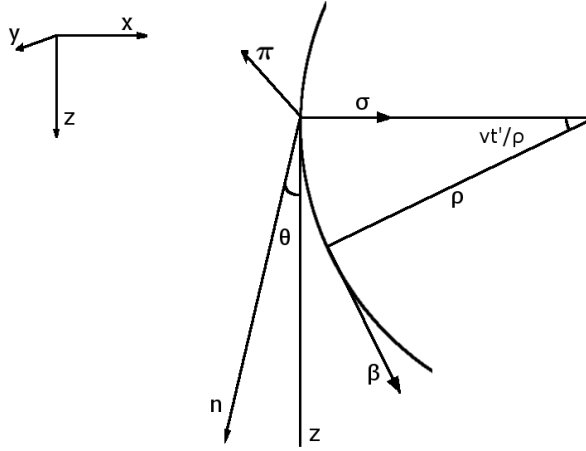
$$\frac{dQ_{tot}}{d\omega d\Omega} = \frac{2\alpha^2\omega^2}{\mu_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt' \right|^2.\quad (4.7)$$

Deze bevat ook de polarisatie, als men bijvoorbeeld de x -component van de uitgezonden straling wil beschouwen dan volgt uit de afleiding hierboven

$$\frac{d(Q_{tot})_x}{d\omega d\Omega} = \frac{2\alpha^2\omega^2}{\mu_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) e^{-i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt' \right|^2.$$

4.2 Benaderingen bij een gekromde beweging

In deze paragraaf wordt eerst het hoekafhankelijk spectrum bepaald voor een sterk relativistisch deeltje dat een gekromde beweging uitvoert. Daarmee kan



Figuur 12: Het gebruikte assenstelsel van een cirkelbeweging.

men vervolgens het spectrum van deeltjes in een cirkel- of spiraalvormige baan bepalen.

Gegeven een gekromde beweging met kromtestraal ρ , zie figuur 12. Omdat de uitgezonden bundel straling een typische tophoek van $1/\gamma$ heeft, ontvangt men alleen straling over een lengte van enkele malen $\frac{\rho}{\gamma}$. De rest van de baan is dus niet van belang voor het ontvangen spectrum.

De gekromde beweging ligt in het x, z -vlak en \mathbf{n} in het y, z -vlak, deze beperking op \mathbf{n} kan altijd gemaakt worden voor een voldoende lange gekromde beweging. Verder is $t' = 0$ zo gekozen dat β dan in de z -richting staat en voor de polarisatierichtingen in het vlak loodrecht op \mathbf{n} geldt

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{x} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}.$$

Voor een sterk relativistisch deeltje is $\beta \simeq 1$, waarmee de componenten van β loodrecht op \mathbf{n} in benadering gelijk zijn aan

$$\beta_{\perp} \simeq \sin\left(\frac{vt'}{\rho}\right)\boldsymbol{\sigma} - \sin(\theta) \cos\left(\frac{vt'}{\rho}\right)\boldsymbol{\pi}.$$

Als men in de argumenten ook benadert met $v \simeq c$ en de eerste orde expansies voor kleine θ en t' neemt wordt het vectorproduct van formule (4.7)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \simeq -\frac{ct'}{\rho}\boldsymbol{\sigma} + \theta\boldsymbol{\pi}. \quad (4.8)$$

Vervolgens moet de exponent uit formule (4.7) benaderd worden. Als de bron niet te dicht bij staat geldt

$$R(t') \simeq R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t') = R_0 - \rho \cos(\theta) \sin\left(\frac{vt'}{\rho}\right),$$

waar R_0 de afstand tussen waarnemer en midden van de cirkelbaan is en $\mathbf{r}_0(t')$ de positie van het deeltje is ten opzichte van dat midden. Omdat men de absolute waarde neemt kan R_0 weggelaten worden, deze levert slechts een complexe factor met modulus één. Als men nu de goniometrische functies benadert voor kleine argumenten en gebruik maakt van $1 - \beta \simeq \frac{1}{2\gamma^2}$ krijgt men tot de derde orde

$$i\omega(t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')) \simeq i\omega \left(\frac{1 + \gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} t' + \frac{c^2 t'^3}{6\rho^2} \right). \quad (4.9)$$

Met de benaderingen van formules (4.8)-(4.9) krijgt men dan de onderstaande uitdrukkingen voor de beide polarisatierichtingen van formule (4.7). Er is van de notatie Q_{tot} afgestapt omdat in deze benadering de situatie wordt uitgewerkt waarin men eenmaal de bundel straling ziet passeren.

$$\begin{aligned} \frac{dQ_\sigma}{d\omega d\Omega} &= \frac{2\alpha^2\omega^2}{\mu_0 c} \left| \int \frac{ct'}{\rho} e^{i\omega \left(\frac{1+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} t' + \frac{c^2 t'^3}{6\rho^2} \right)} dt' \right|^2 \\ &= \frac{2\alpha^2\omega^2}{\mu_0 c} \left| \int \frac{ct'}{\rho} i \sin \left(\frac{1 + \gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} \omega t' + \frac{\omega c^2 t'^3}{6\rho^2} \right) dt' \right|^2 \\ \frac{dQ_\pi}{d\omega d\Omega} &= \frac{2\alpha^2\omega^2}{\mu_0 c} \left| \int \theta e^{i\omega \left(\frac{1+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} t' + \frac{c^2 t'^3}{6\rho^2} \right)} dt' \right|^2 \\ &= \frac{2\alpha^2\omega^2\theta^2}{\mu_0 c} \left| \int \cos \left(\frac{1 + \gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} \omega t' + \frac{\omega c^2 t'^3}{6\rho^2} \right) dt' \right|^2. \end{aligned}$$

De gemaakte expansies zijn geldig in het gebied $|t'| \lesssim \frac{\rho}{c}$, dit is dan ook het interval waarover geïntegreerd mag worden. Voor sterk relativistische deeltjes zal praktisch alle ontvangen straling binnen dit gebied uitgezonden zijn. Het symmetrische interval rond $t' = 0$ zorgt ervoor dat in de integralen alleen de even termen overblijven.

Om het argument van de functies in de vorm $\kappa x + x^3/3$ te krijgen (om ze hierna te kunnen schrijven als Airy functies) gaat men over op de dimensieloze variabele $x = \left(\frac{\omega c^2}{2\rho^2} \right)^{1/3} t'$. Als men nu ook de kritische frequentie, formule (2.14), gebruikt krijgt men

$$\begin{aligned} \frac{dQ_\sigma}{d\omega d\Omega} &= \frac{8\alpha^2\gamma^2}{\mu_0 c} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} \left| \int x \sin \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2\theta^2)x + \frac{x^3}{3} \right) dx \right|^2 \\ \frac{dQ_\pi}{d\omega d\Omega} &= \frac{8\alpha^2\gamma^4\theta^2}{\mu_0 c} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{4/3} \left| \int \cos \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2\theta^2)x + \frac{x^3}{3} \right) dx \right|^2, \end{aligned}$$

waar geïntegreerd mag worden over

$$|x| \lesssim \left(\frac{\omega\rho}{2c} \right)^{1/3} \simeq \gamma \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{1/3}.$$

Voor ω niet te klein ten opzichte van ω_c en $\gamma \gg 1$ kunnen de integratiegrenzen op $\pm\infty$ gesteld worden, het snelle oscillerende gedrag zorgt er voor dat de fout klein is. Ook voor $\frac{\omega}{\omega_c} \simeq 0$ is de absolute fout klein, door de factor voor de integraal gaat het resultaat ook met de grenzen op $\pm\infty$ naar nul. De integralen zijn nu te schrijven als Airy functies, zie appendix A.A

$$Ai(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(yx + \frac{x^3}{3}\right) dx.$$

Bij een periodieke beweging kan men P nu definiëren als het gemiddelde ontvangen vermogen $P = Q/T_{obs}$, waar T_{obs} de waargenomen periode is. Zo krijgt men na enig gepuzzel met constanten

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 c (q\gamma)^2}{\pi T_{obs}} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} Ai'^2\left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2\theta^2)\right) \quad (4.10)$$

$$\frac{dP_\pi}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 c (q\gamma^2\theta)^2}{\pi T_{obs}} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{4/3} Ai^2\left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2\theta^2)\right) \quad (4.11)$$

Aan de hand van dit algemene resultaat voor het hoekafhankelijke spectrum zal nu het hoekonafhankelijke spectrum van een deeltje in een cirkel- en spiraalbaan worden bepaald.

4.3 Het spectrum bij een cirkelbeweging

Het verliezen van de hoekafhankelijkheid is doorgaans gewenst als men een groot aantal elektronen waarneemt die niet allemaal dezelfde richting en baan hebben, zoals in de astronomie. Om het hoekonafhankelijke spectrum te bepalen integreert men formules (4.10)-(4.11) simpelweg over alle richtingen.

Bij een cirkelbeweging ligt het voor de hand de ruimtehoek (in de geometrie van figuur 12) te definiëren als

$$d\Omega = \cos(\theta) d\phi d\theta \quad (\text{met } \phi \text{ in het } x, z\text{-vlak}). \quad (4.12)$$

Op deze manier geeft de ϕ -richting slechts een factor 2π , en loopt de hoek θ van $-\frac{\pi}{2}$ tot $\frac{\pi}{2}$. Maar met de eerder gemaakte benaderingen mogen formules (4.10)-(4.11) alleen over kleine θ geïntegreerd worden.

Omdat in het argument van de Airy functie een term $\gamma^2\theta^2$ staat, en de Airy functie zeer snel naar nul gaat, kan men de integratiegrenzen van θ echter op $\pm\infty$ zetten. Dit gaat niet op als $\omega \ll \omega_c$, maar dan zorgt de voorfactor die naar nul gaat ervoor dat de absolute fout toch klein is.

In de ruimtehoek, formule (4.12), kan men de benadering $\cos(\theta) \simeq 1$ maken, immers alle straling wordt onder kleine θ uitgezonden. Tevens geldt bij een cirkelbeweging voor de waargenomen periode

$$\frac{1}{T_{obs}} = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi\gamma m},$$

zodat men de volgende integralen krijgt

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{\mu_0 \gamma B c q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right) d\theta \quad (4.13)$$

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{\mu_0 \gamma B c q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{4/3} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \theta^2 Ai^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right) d\theta. \quad (4.14)$$

In appendices A.A–A.E wordt dit uitgewerkt tot onderstaande formules, het hoekonafhankelijk spectrum van een deeltje in een cirkelbaan

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{3\mu_0 B c q^3}{16\pi m} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{3Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{3\mu_0 B c q^3}{16\pi m} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right] \quad (4.16)$$

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{3\mu_0 B c q^3}{8\pi m} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{2Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right], \quad (4.17)$$

$$\text{met } q_0 = \left(\frac{3\omega}{2\omega_c} \right)^{2/3} \quad \text{en} \quad \omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B.$$

Men ziet dat de functies voor het uitgezonden vermogen per frequentie alleen van γ en ω afhangen in de vorm $\frac{\omega}{\omega_c}$. Ofwel voor een deeltje in een cirkelbaan kan men schrijven

$$\frac{dP}{d\omega} = F \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right), \quad (4.18)$$

zie figuur 14 voor een plot van deze functie.

Het in deze paragraaf verkregen spectrum wordt in de literatuur vaak in Bessel functies uitgedrukt, zie appendix B. Voor een computationeel snelle benadering is er appendix C.

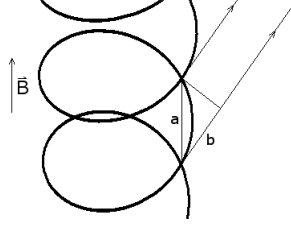
4.4 Het spectrum bij een spiraalbeweging

De afleiding hierboven voor het spectrum bij een cirkelbeweging gaat voor het grootste deel ook op voor een spiraalbeweging. Als een deeltje ver genoeg weg spiraliseert dan is de geleidelijke verplaatsing van het deeltje met de tijd te verwaarlozen voor de waarnemer, men ontvangt dus straling van een deeltje dat op ogenschijnlijk dezelfde positie telkens een gekromde baan doorloopt.

Rekening houden met de grotere kromtestraal van een spiraal gaat via de variabele ω_c waar ρ in opgenomen is, zie ook formule (2.13)

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin(\alpha) \simeq \frac{3\gamma^3 c}{2\rho}.$$

De waargenomen periode T_{obs} verschilt ook omdat het deeltje naar de waarnemer toe komt, zie figuur 13. Er geldt $a \simeq cT \cos(\alpha)$, waar T de periode is. Immers



Figuur 13: Een spiralerend deeltje, aan de hand van a en b kan de waargenomen periode bepaald worden.

α is de hoek tussen snelheid en \mathbf{B} -veld. Omdat het lijnstuk a parrallel aan \mathbf{B} is, heeft lijnstuk b lengte $cT \cos^2(\alpha)$. Het tijdsverschil dat de waarnemer ziet is

$$T_{obs} = T - T \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha) \frac{2\pi}{\omega_B},$$

hiermee wordt het ontvangen spectrum voor een spiralerend deeltje

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{3\mu_0 B c q^3}{16\pi m \sin^2(\alpha)} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-3 \frac{Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{3\mu_0 B c q^3}{16\pi m \sin^2(\alpha)} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{6\mu_0 B c q^3}{16\pi m \sin^2(\alpha)} \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{2Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right], \quad (4.21)$$

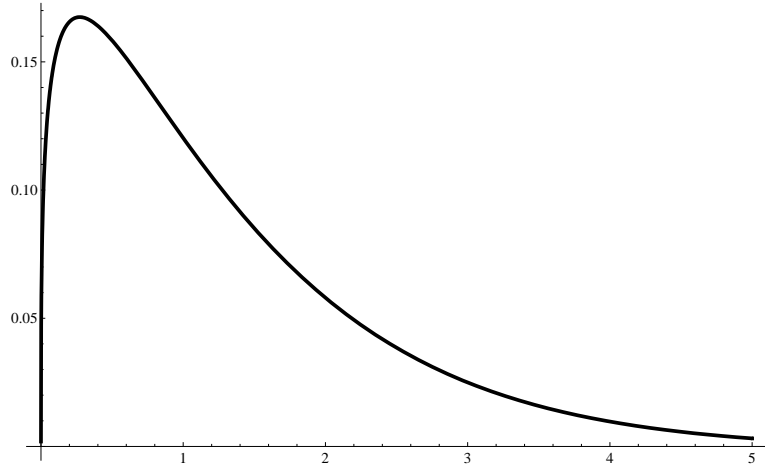
$$\text{met } q_0 = \left(\frac{3\omega}{2\omega_c} \right)^{2/3} \quad \text{en} \quad \omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin(\alpha).$$

Men ziet dat het spectrum van een spiralerend deeltje uitgedrukt in $\frac{\omega}{\omega_c}$ dezelfde vorm heeft als dat van een deeltje in een cirkelbaan, dus ook bij een spiraalbeweging kan het spectrum in de vorm van formule (4.18) geschreven worden.

5 Synchrotronstraling van meerdere elektronen

Waar er tot nu toe slechts gesproken is over het spectrum van een enkel elektron³, heeft men in de praktijk doorgaans te maken met een groot aantal elektronen als synchrotronbron. Omdat de deeltjes energie verliezen als gevolg van de straling die ze uitzenden, is een interessant effect dat de distributie van elektronen met de tijd van vorm verandert.

³Andere geladen deeltjes kunnen ook een synchrotronbron zijn, maar in de praktijk heeft men doorgaans te maken met elektronen die vanwege hun lage massa sneller versnellen.



Figuur 14: Plot van de functie $F(x)$, deze geeft het spectrum van één deeltje in termen van $\frac{\omega}{\omega_c}$. De voorfactor is weggelaten.

5.1 Een machtswet verdeling van elektronen

In de kosmos heeft men vaak te maken met elektronen die tussen bepaalde energieën via een machtswet gedistribueerd zijn. Omdat de γ -factor een maat voor de energie is kan men dan schrijven

$$N(\gamma)d\gamma = C\gamma^{-p}d\gamma \quad \text{voor } \gamma_l < \gamma < \gamma_h,$$

waar $N(\gamma)$ de distributie van elektronen is. Het waargenomen spectrum van zo'n ensemble geladen deeltjes is dan, gebruikmakend van formule (4.18)

$$\frac{dP_{tot}}{d\omega} = \int_{\gamma_l}^{\gamma_h} N(\gamma)F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\gamma.$$

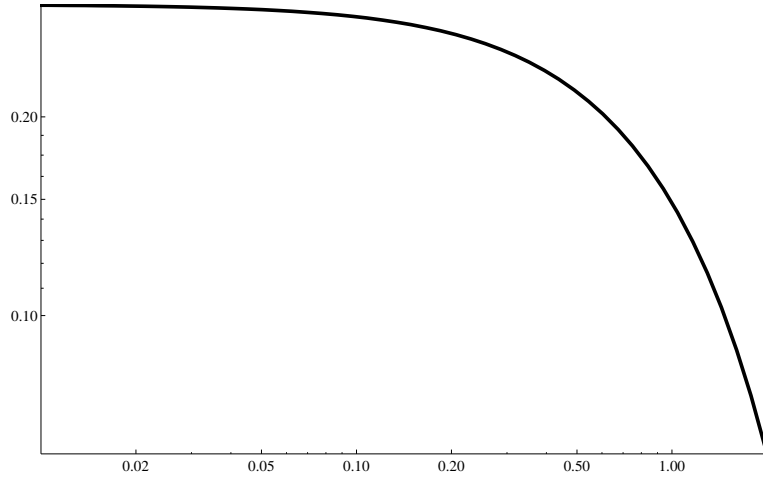
Overgaan op $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\kappa\omega}{\gamma^2}$ met $\kappa = \frac{2m}{3qB}$ geeft

$$\frac{dP_{tot}}{d\omega} \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{\kappa\omega/\gamma_h^2}^{\kappa\omega/\gamma_l^2} x^{(p-3)/2} F(x) dx. \quad (5.1)$$

De integrand levert alleen een significante bijdrage aan de integraal over een beperkt gebied, zie figuur 14 waar de functie $F(x)$ geplot is. Voor voldoende grote γ_h en kleine γ_l is de integraal dan voor een groot bereik nauwelijks afhankelijk van ω , dit is weergegeven in figuur 15 waar de integraal

$$I(x) = \int_x^5 F(y) dy \quad (5.2)$$

dubbel-logaritmisch geplot is. Men ziet dat voor $5\gamma_l^2 < \kappa\omega < \gamma_h^2/5$ de integraal min of meer constant is, en de term $x^{(p-3)/2}$ verandert daar niet zo veel aan



Figuur 15: Dubbel-logaritmische plot van formule (5.2)

voor formule (5.1)⁴, ofwel

$$\frac{dP_{tot}}{d\omega} \propto \omega^{-(p-1)/2} \quad \text{voor } 5\gamma_l^2 < \kappa\omega < \gamma_h^2/5. \quad (5.3)$$

Een concreet voorbeeld is hierbij misschien verhelderend, dus stel dat men te maken heeft met de volgende condities:

$$p = 2.5, \quad \kappa = 10^{-6} s, \quad \gamma_{min} = 10, \quad \gamma_{max} = 500. \quad (5.4)$$

Men verwacht dan voor $5 \cdot 10^8 < \omega < 5 \cdot 10^{10}$ een spectrale index van $3/4$, zie figuur 16 om dit te vergelijken met de numerieke uitwerking van de integraal.

5.2 Energieverlies door synchrotronstraling

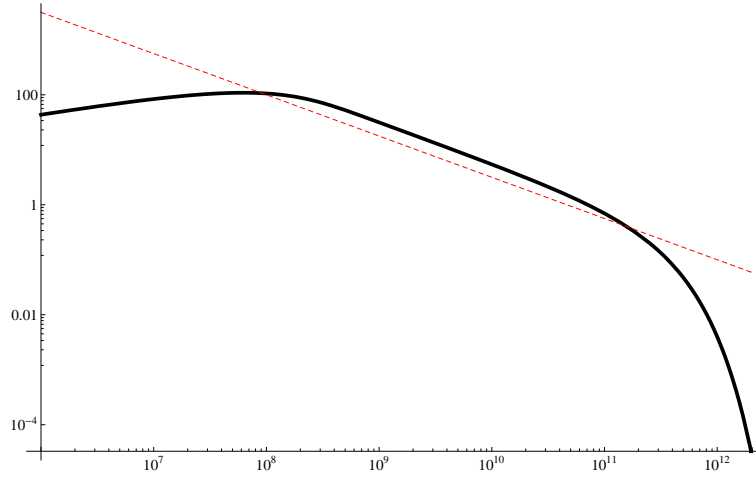
Een deeltje dat synchrotronstraling uitzendt verliest energie, dit wordt ook wel ‘synchrotron koeling’ genoemd. Uit formule (3.13) volgt dat voor het energieverlies van sterk relativistische deeltjes in benadering geldt

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\lambda\gamma^2(t) \quad \text{met} \quad \lambda = \frac{\mu_0 q^4 B^2 \sin^2(\alpha)}{6\pi m^3 c^3}. \quad (5.5)$$

Hier is gebruikt dat de energie van een deeltje en de γ -factor slechts een constante verschillen. Als men de randvoorwaarde $\gamma(0) = \gamma_0$ instelt luidt de oplossing

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda t + 1/\gamma_0},$$

⁴Een typische waarde voor p is 2.5 of 3, voor waarden die hier erg van verschillen is het wel van belang rekening te houden met de factor $x^{(p-3)/2}$.



Figuur 16: Dubbel-logaritmische plot van het spectrum van een distributie elektronen met de eigenschappen van (5.4), en een lijn evenredig met $\omega^{-3/4}$ (gestreept). Men ziet dat het resultaat in goede overeenstemming is met formule (5.3), voor in dit geval $5 \cdot 10^8 < \omega < 5 \cdot 10^{10}$ is het spectrum nagenoeg evenredig met $\omega^{-3/4}$.

ofwel tijdsduur waarin een elektron met energie γ_0 de helft van zijn energie verliest is

$$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda\gamma_0}.$$

Door het hierboven beschreven energieverlies zal een distributie van elektronen in de tijd van vorm veranderen, de hoog-energetische elektronen zullen immers het eerst uit de verdeling verdwijnen.

Zoals in paragraaf 5.1 genoemd, is er in de kosmos vaak sprake van een distributie van elektronen via een machtswet. Zo'n distributie wordt doorgaans gevormd door de aanwezigheid van een bronfunctie $I(\gamma)$ die aangeeft hoeveel elektronen met energie γ er per tijdseenheid geïnjecteerd worden. Bij veel kosmologische processen is zo'n bron te benaderen met

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= C\gamma^{-p} && \text{voor } \gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max} \\ I(\gamma) &= 0 && \text{voor andere } \gamma \end{aligned}$$

Als de bron een zekere ouderdom heeft, zeg t_{bron} , kan men daarmee een kritische energie definiëren

$$\gamma_c = \frac{1}{\lambda t_{bron}}, \quad (5.6)$$

dit betekent dat een deeltje met energie γ_c in de tijd t_{bron} de helft van zijn energie verliest. Deeltjes met een energie kleiner dan γ_c hebben nog nauwelijks energie verloren, daardoor zal voor de waargenomen distributie $N(\gamma)$ gelden

$$N(\gamma) = I(\gamma)t_{bron} = Ct_{bron}\gamma^{-p} \quad \text{voor } \gamma \lesssim \gamma_c. \quad (5.7)$$

Daarentegen zal er voor deeltjes met een energie groter dan γ_c een evenwicht ontstaan tussen de in- en uitstroom van deeltjes in de distributie. Beschouw een deeltje met energie $\gamma \gtrsim \gamma_c$, bij evenwicht is het aantal deeltjes met een hogere energie constant. De in- en uitstroom in een tijd Δt zijn dan respectievelijk

$$\Delta t \int_{\gamma}^{\gamma_{max}} I(\gamma) d\gamma \quad \text{en} \quad \Delta t N(\gamma) \frac{d\gamma}{dt},$$

en omdat deze gelijk zijn bij evenwicht, ziet men dat

$$N(\gamma) = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^{-1} \int_{\gamma}^{\gamma_{max}} I(\gamma) d\gamma.$$

Gebruikmakend van formule (5.5) krijgt men als oplossingen

$$\begin{aligned} N(\gamma) &= \frac{C}{\lambda(p+1)} (\gamma^{-p-1} - \gamma_{max}^{-p+1} \gamma^{-2}) \quad \text{voor } \gamma > \gamma_{min} \\ N(\gamma) &= \frac{C}{\lambda(p+1)} (\gamma_{min}^{-p+1} - \gamma_{max}^{-p+1}) \gamma^{-2} \quad \text{voor } \gamma < \gamma_{min}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Men kan nu voor een energie γ verschillende situaties onderscheiden

$\gamma \gtrsim \gamma_c$ geeft meerdere mogelijkheden:

- $\gamma_{min} > \gamma_c$ dit wordt wel *fast cooling* genoemd: de injectie van elektronen vindt volledig plaats boven γ_c .
 - bij $\gamma < \gamma_{min}$ geldt $N(\gamma) \propto \gamma^{-2}$
 - bij $\gamma > \gamma_{min}$ geldt $N(\gamma) \propto \gamma^{-p-1}$
- $\gamma_{min} < \gamma_c$ dit wordt wel *slow cooling* genoemd, omdat de meeste elektronen een gamma-factor kleiner dan γ_c hebben en dus langzaam energie verliezen. Er geldt $N(\gamma) \propto \gamma^{-p-1}$.

$\gamma \lesssim \gamma_c$ hierbij geldt simpelweg $N(\gamma) \propto \gamma^{-p}$ voor $\gamma \geq \gamma_{min}$.

Er kunnen door synchrotron koeling dus knikken ontstaan in de machtswet distributie van de elektronen, wat via formule (5.3) ook kan leiden tot zichtbare knikken in het spectrum.

6 De nagloed van gamma-uitbarstingen

Een kosmisch verschijnsel dat in het laatste decennium veel aandacht heeft gekregen is de gamma-uitbarsting. Er zijn meerdere modellen die deze uitbarstingen, voor korte tijd de helderste objecten in het heelal, kunnen verklaren. Zie bijvoorbeeld “The physics of gamma-ray bursts” van T. Piran [13].

Een belangrijke ontdekking werd in 1997 gedaan toen door J. van Paradijs en anderen voor het eerst de nagloed van zo’n uitbarsting werd waargenomen [14]. Er wordt nu aangenomen dat deze nagloed beschreven kan worden aan de hand

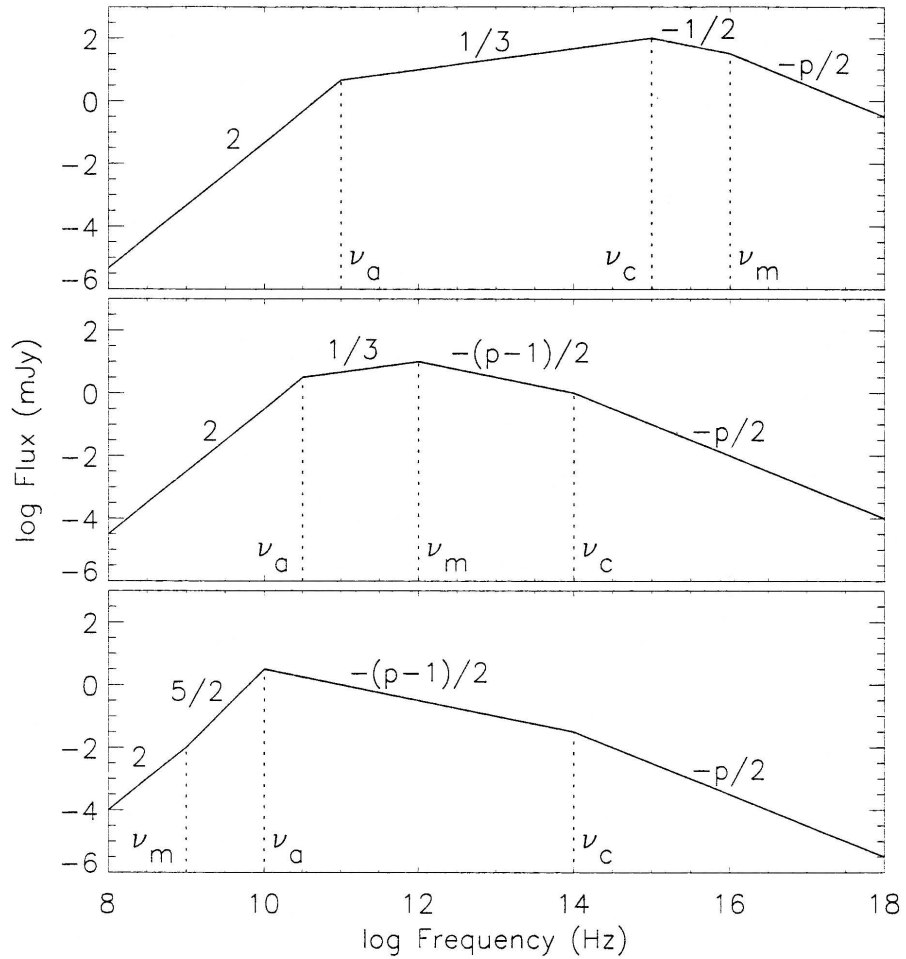
van een relativistische schokgolf. Deze zal elektronen versnellen en doordat de ruimte doorgaans gemagnetiseerd is zullen ze synchrotronstraling uitzenden.

In figuur 17 zijn verschillende spectra horend bij zo'n schokgolf-model weergegeven. Bovenaan de dubbel-logaritmische grafieken staat de helling aangegeven, en men ziet dat de rechter delen overeenkomen met de situaties onder formule (5.8) wanneer deze in formule (5.3) worden ingevuld. Hier is ν_c de typische frequentie⁵ horend bij γ_c en evenzo voor ν_m en γ_{min} . De gedeeltes met een helling van $1/3$ volgen uit het feit dat voor kleine ω/ω_c het spectrum van formule (4.18) evenredig is met $\omega^{1/3}$.

Naast ν_c en ν_m is er nog ν_a : de zogeheten zelf-absorptie frequentie. Wanneer de straling van een elektron een ander elektron passeert, kan deze geabsorbeerd worden. Het blijkt dat deze zelf-absorptie zorgt voor een afsnijding van het spectrum bij zekere 'lage' frequenties, zodat het spectrum daar dan evenredig is met ω^2 of $\omega^{5/2}$ (zie bijvoorbeeld [9] of [15]).

Nu is zo'n breedbandspectrum slechts een momentopname, maar door de verandering van de frequenties ν_c , ν_m en ν_a met de tijd waar te nemen kan men de dynamica van de schokgolf bepalen, zie bijvoorbeeld [16].

⁵met ν wordt de normale frequentie aangegeven en met ω de hoekfrequentie, ze worden hier even door elkaar gebruikt vanwege de notatie in figuur 17.



Figuur 17: Een model breedbandspectrum van de nagloed van synchrotronstraling [17]. Hier zijn de knikken in het spectrum (zie het einde van paragraaf 5.2) duidelijk zichtbaar, waarbij de bovenste figuur *fast cooling* en de onderste twee *slow cooling* laten zien.

7 Slotwoord

Ter afsluiting zal ik eerst kort samenvatten wat er in dit bachelorproject aan bod is gekomen: in paragraaf 2 zagen we dat een geladen deeltje zal gaan roteren om een magnetisch veld, met een frequentie die omgekeerd evenredig is met zijn γ -factor. Uit de speciale relativiteitstheorie bleek vervolgens dat uitgezonden straling van het deeltje typisch wordt waargenomen onder een hoek $1/\gamma$, het zogeheten *beaming effect*. Hiermee was ook een schatting te maken van het frequentiebereik van een synchrotronbron.

Hierna werd in paragraaf 3 de klassieke elektrodynamica toegepast om de hoekverdeling van de synchrotronstraling te bepalen. De straling bleek het meest intens te zijn in de bewegingsrichting van de bron, en met de uitdrukking voor de hoekverdeling was een goede schatting te maken van de openingshoek waarbinnen men een significante hoeveelheid straling verwacht waar te nemen.

Nu kwam in paragraaf 4 het belangrijkste onderwerp van deze scriptie aan bod: de bepaling van het kenmerkende synchrotronspectrum. Na Fourier transformatie en enkele benaderingen die gemaakt konden worden door het *beaming effect* werd uiteindelijk een uitdrukking in Airy functies verkregen. Over de bewerkingen die hierbij nodig waren met betrekking tot deze gecompliceerde functies ging appendix A.

In paragraaf 5 werd vervolgens de stap gemaakt van spectrum van één elektron naar het spectrum van een machtswet verdeling van elektronen. Hier kwam ook het energieverlies door synchrotronstraling aan bod, ‘synchrotron koelen’, en de gevolgen die dit heeft voor de vorm van de verdeling. Het bleek dat er knikken in de distributie kunnen ontstaan, welke ook waarneembaar kunnen worden in het spectrum. Dit laatste werd geïllustreerd in paragraaf 6, waar een toepassing van synchrotronstraling binnen de hoge-energie astrofysica werd uitgelicht: de nagloed van gamma uitbarstingen.

Terugkijkend zie ik dat synchrotronstraling natuurlijk zijn charme heeft omdat het één van de weinige voorbeelden is waar de theorie zo ver vooraf ging aan de waarneming. Maar bovenal vind ik het een mooi, nog steeds actueel onderwerp uit de klassieke elektrodynamica, dat raakt aan de speciale relativiteitstheorie en interessante wiskunde en benaderingen vereist.

Dankwoord Ik wil graag mijn begeleider Leo van den Horn van harte bedanken, voor de vrijheid die hij me gaf bij dit onderwerp en voor de veelvuldige afspraken waar hij me vriendelijk voorzag van nuttig commentaar.

A Appendix

A.A De Airy functie

De Airy functie⁶ is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$h''(x) = x h(x). \quad (\text{A.1})$$

Deze functie heeft onder meer de volgende representatie [18], welke in paragraaf 4 gebruikt wordt in de uitdrukking voor het spectrum

$$Ai(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(yt + \frac{t^3}{3}\right) dt. \quad (\text{A.2})$$

Meer in het algemeen geldt voor $z > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(yt + zt^3) dt = (3z)^{-1/3} Ai\left(y(3z)^{-1/3}\right). \quad (\text{A.3})$$

A.B Integraal over $Ai(y)$

Uit formule (A.2) volgt direct dat

$$\begin{aligned} AI(y) &\equiv \int Ai(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int \cos\left(yt + \frac{t^3}{3}\right) dy \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(yt + \frac{t^3}{3}\right)}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(yt + \frac{t^3}{3}\right)}{t} dt. \end{aligned}$$

Als men over de positieve, reële getallen integreert krijgt men

$$\int_0^{\infty} Ai(y) dy = AI(\infty) - AI(0). \quad (\text{A.4})$$

De eerste term van de rechterzijde is

$$AI(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(xt + \frac{t^3}{3}\right)}{t} dt. \quad (\text{A.5})$$

Door het oscillerende gedrag in deze limiet verwacht men alleen een bijdrage aan de integraal rond $t = 0$ waar de integrand naar ∞ gaat, in dit gebied is de term $\frac{t^3}{3}$ verwaarloosbaar. Gebruik makend van de volgende integraal, uitgewerkt in appendix A.F, kan dit op een mooie manier onderbouwd worden

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\forall a > 0).$$

⁶Vernoemd naar de G.B. Airy, Brits wiskundige en astronoom uit de 19^e eeuw. Hij introduceerde de deze functie in een iets andere vorm voor een optische toepassing.

Daarmee geldt namelijk

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{1/\sqrt{a}} \frac{\sin(ax)}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{1/\sqrt{a}}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} - \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{1/\sqrt{a}} \frac{\sin(ax)}{x} dx = 0.\end{aligned}$$

Alleen het gebied rond $t = 0$ zal dus een bijdrage leveren aan de integraal, invullen in formule (A.5) geeft

$$AI(\infty) = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Vervolgens is de andere term aan de rechterzijde van formule (A.4)

$$\begin{aligned}AI(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\frac{t^3}{3})}{t} dt \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{1}{6}.\end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De combinatie van formules (A.4)–(A.7) levert tenslotte

$$\int_0^{\infty} Ai(y) dy = \frac{1}{3}. \quad (\text{A.8})$$

Deze integraal is van belang omdat het vaak makkelijker is om $\frac{1}{3} - \int_0^x Ai(y) dy$ te berekenen of schatten dan $\int_x^{\infty} Ai(y) dy$.

A.C Integraal over $y^{2n} Ai^2(a + y^2)$

Bij het bepalen van het spectrum is een uitdrukking nodig voor de integraal over $y^2 Ai^2$, zie formule (4.14). Allereerst moet men een uitdrukking hebben voor $Ai^2(y)$

$$Ai^2(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \cos\left(yt + \frac{t^3}{3}\right) \cos\left(ys + \frac{s^3}{3}\right) ds dt.$$

Gebruikmakend van de identiteit $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ wordt de integrand

$$\frac{1}{2} \left[\cos\left(y(t + s) + \frac{t^3 + s^3}{3}\right) + \cos\left(y(t - s) + \frac{t^3 - s^3}{3}\right) \right].$$

Deze is ook te schrijven in de variabelen $u = s + t$ en $v = s - t$

$$\frac{1}{2} \left[\cos\left(u\left(y + \frac{v^2}{4}\right) + \frac{u^3}{12}\right) + \cos\left(v\left(y + \frac{u^2}{4}\right) + \frac{v^3}{12}\right) \right].$$

In plaats van over het oppervlakte element $dsdt$ kan men \mathbb{R}^2 ook integreren over het geroteerde element $\frac{du}{\sqrt{2}}\frac{dv}{\sqrt{2}}$, zo krijgt men

$$Ai^2(y) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \cos\left(yu + \frac{uv^2}{4} + \frac{u^3}{12}\right) + \cos\left(yv + \frac{u^2v}{4} + \frac{v^3}{12}\right) dudv.$$

Het moge duidelijk zijn dat bijdrage van beide termen vanwege de symmetrie in de variabelen gelijk is. Als men nu overgaat op de variabelen $x = \frac{v}{2}$ en $z = 4^{1/3}u$ krijgt men

$$Ai^2(y) = \frac{1}{4^{2/3}\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \cos\left(4^{1/3}z(y+x^2) + \frac{z^3}{3}\right) dzdx.$$

Met deze uitdrukking voor $Ai^2(y)$ kan men nu verder gaan met de integraal over $y^{2n}Ai^2(y)$ die voor het spectrum van belang was

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^{2n} Ai^2(a+y^2) dy & (A.9) \\ &= \frac{1}{4^{2/3}\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} y^{2n} \cos\left(4^{1/3}z(a+y^2+x^2) + \frac{z^3}{3}\right) dx dy dz. \end{aligned}$$

De integratie over \mathbb{R}^3 kan ook in cilindrische coördinaten gedaan worden

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi), \quad z = z \quad \text{en} \quad dx dy dz = rd\phi dr dz,$$

zodat formule (A.9) verandert in

$$I(n) = \frac{1}{4^{2/3}\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\phi)^{2n} r^{2n+1} \cos\left(4^{1/3}z(a+r^2) + \frac{z^3}{3}\right) d\phi dr dz.$$

Voor gehele $n \geq 0$ geldt

$$\int_0^{2\pi} \sin(\phi)^{2n} d\phi = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{n!2^n},$$

zie voor een afleiding paragraaf A.G. Samen met de substitutie $w = r^2$ krijgt men zo

$$\begin{aligned} I(n) &= \frac{(2n-1)!!}{n!2^n} \frac{1}{2^{4/3}\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w^n \cos\left(4^{1/3}z(a+w) + \frac{z^3}{3}\right) dz dw \\ &= \frac{(2n-1)!!}{n!2^n} \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^{\infty} w^n Ai\left(4^{1/3}(a+w)\right) dw. \end{aligned}$$

Door over te gaan op $q = 4^{1/3}(a+w)$ en $q_0 = 4^{1/3}a$ wordt dit

$$\begin{aligned} I(n) &= \frac{(2n-1)!!}{n!2^n} \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} 4^{-n/3} (q-q_0)^n Ai(q) dq \\ &= \frac{(2n-1)!!}{n!2^{5n/3+1}} \int_{q_0}^{\infty} (q-q_0)^n Ai(q) dq. \end{aligned}$$

Als men nu formule (A.1) gebruikt kan men partieel integreren, dit geeft

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \quad (\text{A.10})$$

$$I(1) = \frac{q_0}{2^{8/3}} \left[\int_{q_0}^{\infty} \frac{Ai''(q)}{q_0} dq - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right]. \quad (\text{A.11})$$

A.D Integraal over $Ai'^2(a + y^2)$

Bij het bepalen van het spectrum is ook een uitdrukking nodig voor de integraal over Ai'^2 , zie formule (4.13). Door formule (A.10) tweemaal te differentiëren naar a krijgt men

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{da}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} Ai^2(a + y^2) dy &= \left(\frac{d}{da}\right)^2 \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \\ \Leftrightarrow 2 \int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2(a + y^2) + Ai(a + y^2) Ai''(a + y^2) dy &= -\frac{1}{2} Ai'(q_0) \left(\frac{dq_0}{da}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2(a + y^2) dy &= -\frac{1}{2^{2/3}} Ai'(q_0) - \int_{-\infty}^{\infty} (a + y^2) Ai^2(a + y^2) dy, \end{aligned}$$

waar in de laatste stap gebruik gemaakt is van formule (A.1). De rechterzijde is met behulp van formules (A.10)–(A.11) te herschrijven

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^{2/3}} Ai'(q_0) &= -\frac{a}{q_0} Ai'(q_0) \\ -\int_{-\infty}^{\infty} y^2 Ai^2(a + y^2) dy &= \frac{a}{4} \left(\frac{Ai'(q_0)}{q_0} + \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right) \\ -a \int_{-\infty}^{\infty} Ai^2(a + y^2) dy &= -\frac{a}{2} \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq, \end{aligned}$$

zodat men uiteindelijk als resultaat krijgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2(a + y^2) dy = \frac{a}{4} \left(-3 \frac{Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right). \quad (\text{A.12})$$

A.E Bepaling van $\frac{d}{d\omega} P_\sigma$ en $\frac{d}{d\omega} P_\pi$

Met de afleidingen uit appendices A.C en A.D kan men nu formules (4.13)–(4.14) in een simpeler vorm brengen. Voor de σ -component, formule (4.13), begint men bij

$$\begin{aligned} \frac{dP_\sigma}{d\omega} &= \frac{\mu_0 \gamma B c q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 B c q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} Ai'^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c} \right)^{2/3} + z^2 \right) dz, \end{aligned}$$

waar over is gegaan op $z = \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{1/3} \gamma\theta$.

Invullen in formule (A.12) geeft als resultaat, met $q_0 = \left(\frac{3\omega}{2\omega_c}\right)^{2/3}$

$$\frac{dP_\sigma}{d\omega} = \frac{3\mu_0 Bc q^3}{16\pi m} \frac{\omega}{\omega_c} \left(-3 \frac{Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right)$$

Voor de π -component, formule (4.14), begint men dan bij

$$\begin{aligned} \frac{dP_\pi}{d\omega} &= \frac{\mu_0 \gamma Bc q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{4/3} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \theta^2 Ai^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} (1 + \gamma^2 \theta^2) \right) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 Bc q^3}{\pi m} \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 Ai^2 \left(\left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3} + z^2 \right) dz, \end{aligned}$$

waar weer over is gegaan op $z = \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{1/3} \gamma\theta$.

Nu is de integraal in dezelfde vorm als formule (A.9), met $a = \left(\frac{3\omega}{4\omega_c}\right)^{2/3}$.

Door dit in formule (A.11) in te vullen krijgt men

$$\frac{dP_\pi}{d\omega} = \frac{3\mu_0 Bc q^3}{16\pi m} \frac{\omega}{\omega_c} \left(\frac{-Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right).$$

A.F Integraal over $\sin(ax)/x$

Beschouw de volgende integraal en zijn afgeleide

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^{\infty} e^{-yx} \frac{\sin(x)}{x} dx \\ I'(y) &= \int_0^{\infty} -e^{-yx} \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Door $\sin(x)$ in complexe e-machten te schrijven kan men $I'(y)$ integreren

$$I'(y) = \frac{-1}{y^2 + 1},$$

en vanwege de limiet $I(\infty) = 0$ geldt

$$I(0) = \int_{\infty}^0 I'(x) dx = -\arctan(0) + \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Men ziet vervolgens door over te gaan op $z = ax$ dat voor $a > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

A.G Integraal over $\sin(\phi)^{2n}$

Definieer A_n voor gehele $n \geq 0$ als

$$A_n = \int_0^{2\pi} \sin(\phi)^{2n} d\phi.$$

Men kan de integraal omschrijven tot

$$A_n = 2 \int_0^\pi \sin(\phi)^{2n-1} \sin(\phi) d\phi = 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1/2} dx,$$

waar over is gegaan op de variabele $x = \cos(\phi)$. Men ziet nu dat voor A_{n+1} geldt

$$A_{n+1} = 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1/2} dx = A_n - \int_{-1}^1 2x^2(1-x^2)^{n-1/2} dx.$$

Partieel integreren van de rechter integraal levert

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2x^2(1-x^2)^{n-1/2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{-2x^2}{x(2n+1)} \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{n+1/2} \right) dx \\ &= \frac{-1}{2n+1} \left(2x(1-x^2)^{n+1/2} \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n+1/2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} A_{n+1}. \end{aligned}$$

Hiermee krijgt men de recursieve relatie

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1}.$$

Men ziet direct dat $A_0 = 2\pi$, en de recursie is eenvoudig⁷ op te lossen tot

$$A_n = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

B Het spectrum in Besselfuncties

De Airy functie en de gemodificeerde Besselfuncties⁸ van de tweede soort $K_\nu(x)$ zijn nauw aan elkaar gerelateerd [19]

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3\pi}} K_{1/3}(2/3x^{3/2}) \\ Ai'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}(2/3x^{3/2}), \end{aligned}$$

⁷Voor k geheel en positief is $k!!$ gelijk aan het product $k(k-2)(k-4)\dots$ dat eindigt met een factor 2 of 1. Per definitie geldt $0!! = (-1)!! = 1$.

⁸Vernoemd naar F.B. Bessel, Duits wiskundige en astronoom.

waar voor de functies aan rechterzijde de volgende recursieve relaties (zie §74 van [20]) gelden

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x) \quad \text{en} \quad 2K'_{\nu}(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x).$$

De uitdrukkingen voor het spectrum worden dikwijls in dit soort Bessel-functies gegeven, hieronder staan de equivalenten van formules (4.15)–(4.17)

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\sigma}}{d\omega} &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 Bc q^3}{16\pi^2 m} \frac{\omega}{\omega_c} \left[\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(q) dq + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right] \\ \frac{dP_{\pi}}{d\omega} &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 Bc q^3}{16\pi^2 m} \frac{\omega}{\omega_c} \left[\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(q) dq - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right] \\ \frac{dP}{d\omega} &= \frac{\sqrt{3}\mu_0 Bc q^3}{8\pi^2 m} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(q) dq. \end{aligned}$$

Uitdrukkingen voor het ontvangen spectrum bij een spiraalbeweging volgen hier ook uit met de opmerkingen uit paragraaf 4.4.

Een voordeel van deze Besselfuncties is dat formule (4.18), het spectrum van één geladen deeltje uitgedrukt in $x = \omega/\omega_c$, een elegantere vorm krijgt

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}\mu_0 Bc q^3}{8\pi^2 m} x \int_x^{\infty} K_{5/3}(q) dq.$$

C Een benadering van de Airy functies

De Airy functies zijn computationeel relatief lastig te bepalen, daarom kan het handig zijn om over een eenvoudige benadering te beschikken. Voor de toepassingen met betrekking tot synchrotronstraling zijn Airy functies met een positief argument van belang.

Hiervoor kan men bijvoorbeeld de functie

$$g(x) = \left(1 + \frac{2bx}{a}\right) e^{ax+bx^2+c} \quad (\text{C.1})$$

gebruiken. Als men deze functie fit op de Airy functie, krijgt men als goede benadering

$$\begin{aligned} a &= -1.07042 \\ b &= -0.166471 \\ c &= -1.03112. \end{aligned}$$

Met deze parameters is de relatieve fout tot $x \simeq 2.3$ kleiner dan één procent. De afgeleide $g'(x)$ en integraal $G(x)$ van formule (C.1) zijn

$$g'(x) = \left(a + \frac{2b}{a} + 4bx + \frac{4b^2x^2}{a} \right) e^{ax+bx^2+c}$$

$$G(x) = \frac{1}{a} e^{ax+bx^2+c}.$$

Men kan met deze functies ook het spectrum benaderen, formule (4.17) wordt dan bijvoorbeeld

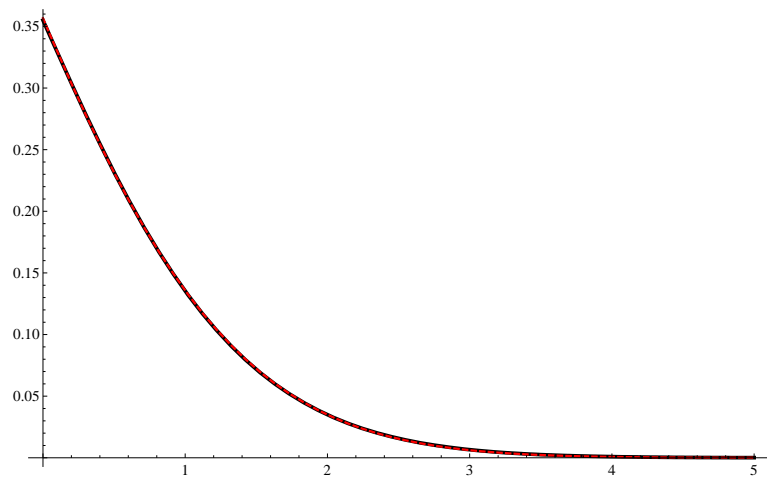
$$\frac{dP}{d\omega} \propto \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{2Ai'(q_0)}{q_0} - \int_{q_0}^{\infty} Ai(q) dq \right] \simeq \frac{\omega}{\omega_c} \left[-\frac{2g'(q_0)}{q_0} + G(q_0) \right] \quad (\text{C.2})$$

$$\text{met } q_0 = \left(\frac{3\omega}{2\omega_c} \right)^{2/3} \quad \text{en} \quad \omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin(\alpha).$$

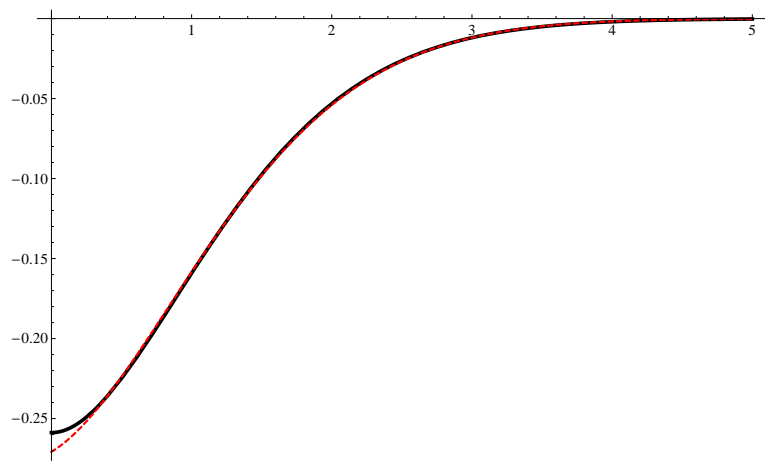
Zie tabel 2 en figuren 18–21 voor eigenschappen en plots van deze benadering.

Tabel 2: Enkele integralen over Airy functies. Alle resultaten zijn decimaal tot 4 significante cijfers weergegeven.

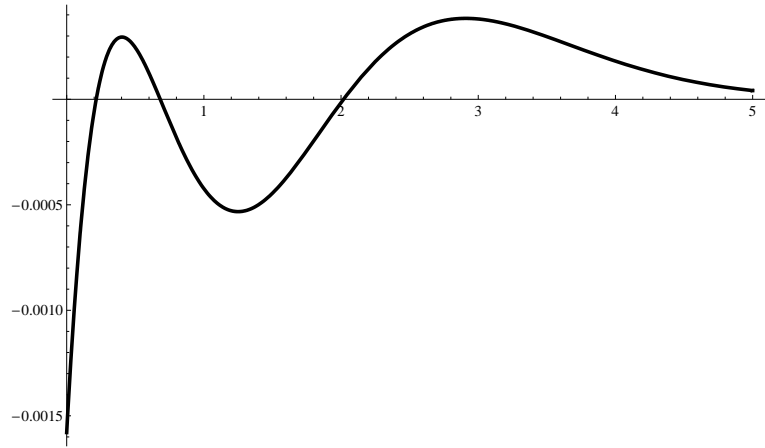
Integraal	Waarde	Formule (C.1)
$\int_0^{\infty} Ai(x) dx$	0.3333	0.3331
$\int_0^{\infty} Ai^2(x) dx$	0.06699	0.06711
$\int_0^{\infty} Ai'^2(x) dx$	0.06126	0.06203
$\int_0^{\infty} x^2 Ai(x) dx$	0.3550	0.3479
$\int_0^{\infty} x^2 Ai^2(x) dx$	0.02521	0.02527
$\int_0^{\infty} x^2 Ai'^2(x) dx$	0.03829	0.03846



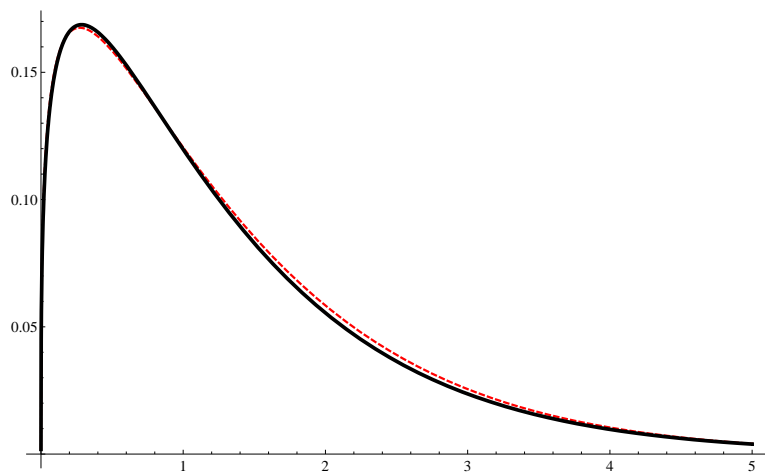
Figuur 18: Plot van de $Ai(x)$ en $g(x)$ (gestreept)



Figuur 19: Plot van $Ai'(x)$ en $g'(x)$ (gestreept)



Figuur 20: Plot van $Ai(x) - g(x)$



Figuur 21: Plot van het spectrum van één deeltje in een cirkelbaan, uitgedrukt in ω/ω_c (doorgetrokken) en de benadering van formule (C.2)(gestreept). De verticale as is geschaald op een arbitraire waarde

Referenties

- [1] F. R. Elder, A. M. Gurewitsch, R. V. Langmuir, and H. C. Pollock, *Physical Review* **71**, 829 (1947).
- [2] G. R. Burbidge, *Astrophysical Journal* **124**, 416 (1956).
- [3] A. Thompson, *X-Ray Data Booklet* (Lawrence Berkeley National Laboratory, 2001).
- [4] J. J. Thompson, *Philosophical Magazine* **44**, 293 (1897).
- [5] J. Larmor, *Proceedings of the Royal Society of London* **61**, 272 (1897).
- [6] A. Liénard, *L'Éclairage Élec* **16**, 5 (1898).
- [7] G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation* (Cambridge University Press, 1912).
- [8] J. Schwinger, *Physical Review* **75**, 1912 (1949).
- [9] V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **3**, 297 (1965).
- [10] A. Hofmann, *The Physics of Synchrotron Radiation* (Cambridge University Press, 2004).
- [11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, 1998).
- [12] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Benjamin Cummings, 1999).
- [13] T. Piran, *Reviews of Modern Physics* **76**, 1143 (2005), arXiv:astro-ph/0405503.
- [14] J. van Paradijs *et al.*, *Nature* **386**, 686 (1997).
- [15] G. B. Rybicki and A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (Wiley, 1985).
- [16] R. Sari, T. Piran, and R. Narayan, *Astrophysical Journal Letters* **497**, L17+ (1998), arXiv:astro-ph/9712005.
- [17] A. J. van der Horst, *Broadband View of Blast Wave Physics: A Study of Gamma-Ray Burst Afterglows* (Dissertation at the University of Amsterdam, 2007).
- [18] O. Vallée and M. Soares, *Airy Functions and Applications to Physics* (Imperial College Press, 2004).
- [19] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1970).
- [20] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, 1980).